

Fusion d'opinions d'experts et théories de l'incertain

S. Destercke^{1 2}, D. Dubois¹ et E. Chojnacki²

¹Institut de Recherche en Informatique de Toulouse
University Paul-Sabatier

²Institut de Radioprotection et de sûreté nucléaire
Cadarache, France

LFA 06

Traitement des opinions

- Représentation des opinions
- Pondération des opinions
- Fusion des opinions

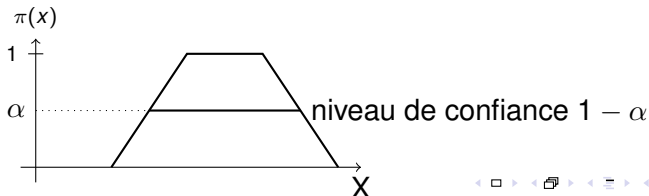
Théorie des possibilités

Distributions de possibilité

- Distribution $\pi : X \rightarrow [0, 1]$
- Deux mesures duales :

$$\Pi(A) = \sup_{x \in X} \pi(x) \quad ; \quad N(A) = 1 - \Pi(A^c)$$

- Forme des opinions : intervalles de confiance



Théorie des fonctions de croyances

Fonctions de croyance

- Distribution $m : 2^X \rightarrow [0, 1]$ ($m(E) > 0$: E ens. focal)
- Deux mesures duales :

$$Bel(A) = \sum_{E, E \subseteq A} m(E) \quad ; \quad Pl(A) = 1 - Bel(A^c)$$

- Possibilités = fonction de croyance avec él. focaux emboîtés
- Forme des opinions : intervalles de confiance, percentiles imprécis, ...

Théorie des probabilités imprécises

Familles convexes de probabilités

- Famille convexe $\mathcal{P}$ de probabilités

- Plusieurs représentations

- Sommets du polyèdre convexe
- Ensembles de contraintes
- Probabilités inférieures/supérieures

$$\underline{P}(A) = \inf_{P \in \mathcal{P}} P(A) \quad ; \quad \overline{P}(A) = \sup_{P \in \mathcal{P}} P(A) = 1 - \underline{P}(A^c)$$

- Distribution de possibilités π

$$\rightarrow \mathcal{P}_\pi = \{P \mid \pi(A) \leq P(A) \leq \Pi(A) \forall A \in X\}$$

- Fonction de croyances m

$$\rightarrow \mathcal{P}_{Bel} = \{P \mid Bel(A) \leq P(A) \leq Pl(A) \forall A \in X\}$$

Principes (Cooke, 91)

Poids = Informativité + Calibration

Principes

- Utilisation de variables témoins
- Favoriser experts précis et bien calibrés
- Pertinence : calcul basé sur observations
- Justesse : Bonne calibration = poids maximum
- Comparabilité des poids

Approche probabiliste

Entropie relative $I(r, p) = \sum_{i=1}^{|X|} r_i \cdot \ln(r_i/p_i)$ (p opinion experte)

Mesures

- **Informativité**

u : distribution uniforme $\rightarrow$ Informativité = $I(p, u)$

- **Calibration**

r : distribution témoin $\rightarrow$ Calibration : $I(r, p)$

Problème : confusion entre variabilité et imprécision

Mesure d'informativité

Inverse de Möbius

à partir d'une mesure inférieure $\mu(A)$ ($N(A), Bel(A), \underline{P}(A)$)

$$m(E) = \sum_{A \subseteq E} -1^{|E-A|} \mu(A) \quad E \subset X$$

avec $\sum_X m(E) = 1$

Imprécision : $IP = \sum_X m(E)|E| \rightarrow$ Informativité : $Sp = \frac{|X|-IP}{|X|}$

Mesure de calibration

Connaissance déterministe ($x = v_*$)

Utiliser les mesures supérieures $\pi(v_*)$, $PI(v_*)$, $\bar{P}(v_*)$

Connaissance imprécise ($x \in K(v_*)$)

Utiliser la notion d'inclusion $\rightarrow$ soit une opinion experte correspondant à la représentation K_e , un indice d'inclusion possible :

$$IC = \frac{IP(K_e \cap K(v_*))}{IP(K(v_*))}$$

Utilisation des poids

Utilisation explicite

- Dans la méthode de fusion : moyenne pondérée
- Par affaiblissement (discounting) de l'opinion

Utilisation implicite

- Utilisation de l'ordre induit par les poids calculés entre les experts

Modes primitifs

Trois modes principaux

- Conjonctif ($K_{e_1} * K_{e_2} \subseteq K_{e_1} \cap K_{e_2}$)
- Disjonctif ($K_{e_1} * K_{e_2} \supseteq K_{e_1} \cup K_{e_2}$)
- Comptage (moyenne) ($K_{e_1} \cap K_{e_2} \supseteq K_{e_1} * K_{e_2} \supseteq K_{e_1} \cup K_{e_2}$)

Modes primitifs

Trois modes principaux

- Conjonctif ($K_{e_1} * K_{e_2} \subseteq K_{e_1} \cap K_{e_2}$)
 - Possibilités : $\pi_{\cap} = \top(\pi_1, \pi_2)$
 - Croyances : $m_{\cap}(A) = \sum_{E_1 \cap E_2 = A} m(E_1)m(E_2)$
 - Probabilités Imp. : $\mathcal{P}_{\cap} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$
- Disjonctif ($K_{e_1} * K_{e_2} \supseteq K_{e_1} \cup K_{e_2}$)
- Comptage (moyenne) ($K_{e_1} \cap K_{e_2} \supseteq K_{e_1} * K_{e_2} \supseteq K_{e_1} \cup K_{e_2}$)

Modes primitifs

Trois modes principaux

- Conjonctif ($K_{e_1} * K_{e_2} \subseteq K_{e_1} \cap K_{e_2}$)
- Disjonctif ($K_{e_1} * K_{e_2} \supseteq K_{e_1} \cup K_{e_2}$)
 - Possibilités : $\pi_U = \perp(\pi_1, \pi_2)$
 - Croyances : $m_U(A) = \sum_{E_1 \cup E_2 = A} m(E_1)m(E_2)$
 - Probabilités Imp. : $\mathcal{P}_U = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$
 - $\rightarrow$ Propriété de convexité pas généralement conservée
- Comptage (moyenne) ($K_{e_1} \cap K_{e_2} \supseteq K_{e_1} * K_{e_2} \supseteq K_{e_1} \cup K_{e_2}$)

Modes primitifs

Trois modes principaux

- Conjonctif ($K_{e_1} * K_{e_2} \subseteq K_{e_1} \cap K_{e_2}$)
- Disjonctif ($K_{e_1} * K_{e_2} \supseteq K_{e_1} \cup K_{e_2}$)
- Comptage (moyenne) ($K_{e_1} \cap K_{e_2} \supseteq K_{e_1} * K_{e_2} \supseteq K_{e_1} \cup K_{e_2}$)
 - Possibilités : $\pi_{\Sigma} = \sum_i \lambda_i \pi_i$
 - Croyances : $m_{\Sigma}(A) = \sum_i \lambda_i m_i(A)$
 - Probabilités Imp. : $\mathcal{P}_{\Sigma} = \sum_i \lambda_i \mathcal{P}_i$

Autres modes

Autres méthodes de fusion

Construites à partir des primitives

- Sous-ensembles maximaux cohérents
- Raffinement hiérarchique

Approches bayésiennes

Divergences entre théories : illustration

Opinions expertes

	Expert 1	Expert 2
Intervalle à 60%	[3, 5]	[6, 8]
Intervalle à 100%	[1, 7]	[4, 10]

Conjonction

Possibilités	Croyances	Proba. imp.
$m([4, 7]) = 0.4$	$m([4, 7]) = 0.16$	$\emptyset \rightarrow$ $P([3, 5]) > 0.6$ et $P([6, 8]) > 0.6$ impossible
	$m([4, 5]) = 0.24$	
	$m([6, 7]) = 0.24$	
$m(\emptyset) = 0.6$	$m([\emptyset]) = 0.36$	

Conclusions

- Traitement des opinions peut se faire dans un cadre commun (méthodes proposées dans une théorie le plus souvent directement extensibles aux autres)
- Divergence des résultats selon le formalisme adopté, même avec des données et des objectifs communs → besoin de poursuivre l'étude des relations entre théories.